1 *Sia* $m \in \mathbb{N}$. *La distribuzione* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *soddisfa l'equazione*

$$x^m T = 0 \tag{1}$$

se e solo se esistono delle costanti c_h *tali che*

$$T = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \delta^{(h)}. \tag{2}$$

Dim. Facciamo vedere, intanto, che $\operatorname{spt} \mathrm{T} = \{0\}$. Sia $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R})$ tale che

$$\operatorname{spt} \mathrm{T} \cap \operatorname{spt} \varphi = \emptyset.$$

Poniamo

$$\widetilde{\varphi}(x) \begin{cases} = x^{-m}\varphi(x) & \text{se } x \in \operatorname{spt} \varphi \\ = 0 & \text{se } x \notin \operatorname{spt} \varphi. \end{cases}$$

Ovviamente risulta $x^m \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ per ogni x e, inoltre, $\widetilde{\varphi} \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R})$. Quindi

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, x^m \widetilde{\varphi} \rangle = \langle x^m T, \widetilde{\varphi} \rangle = 0$$

dato che T soddisfa la (1). Questo mostra che $\operatorname{spt} \mathrm{T} = \{0\}$. Per un risultato noto, esistono un $N \in \mathbb{N}$ e delle costanti c_h tali che

$$T = \sum_{h=0}^{N} c_h \delta^{(h)}. \tag{3}$$

Per completare la dimostrazione occorre far vedere che $c_h = 0$ per ogni $h \geqslant m$.

Sia φ una qualsiasi funzione di $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R})$. Avremo

$$\langle x^m T, \varphi \rangle = 0.$$

D'altra parte,in virtù della (3), possiamo scrivere

$$0 = \langle x^m T, \varphi \rangle = \sum_{h=0}^{N} c_h \langle x^m \delta^{(h)}, \varphi \rangle = \sum_{h=0}^{N} c_h \langle \delta^{(h)}, x^m \varphi \rangle =$$

$$\sum_{h=0}^{N} (-1)^h c_h \langle \delta, D^h(x^m \varphi) \rangle = \sum_{h=0}^{N} (-1)^h c_h D^h(x^m \varphi)\Big|_{x=0}.$$

Inoltre abbiamo

$$D^h(x^m\varphi(x)) = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} D^k(x^m)\, \varphi^{(h-k)}(x).$$

Essendo

$$D^k(x^m) \begin{cases} = m(m-1)\dots(m-k+1)\, x^{m-k} & \text{se } k < m, \\ = m! & \text{se } k = m \\ = 0 & \text{se } k > m, \end{cases}$$

e dunque

$$D^k(x^m)\Big|_{x=0} = \delta_k^m m!,$$

avremo

$$D^h(x^m\varphi(x))\Big|_{x=0} \begin{cases} = \displaystyle\binom{h}{m} m!\, \varphi^{(h-m)}(0) & \text{se } h \geqslant m \\ = 0 & \text{se } h < m. \end{cases}$$

Questo implica

$$\sum_{h=m}^{N} (-1)^h \frac{h!}{(h-m)!}\, c_h\, \varphi^{(h-m)}(0) = 0. \tag{4}$$

La (4) dovrà quindi valere per ogni $\varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sia ψ una funzione $\mathring{C}^\infty(\mathbb{R})$ che vale 1 in un intorno dell'origine. Fissiamo un h compreso tra m e N e poniamo

$$\varphi(x) = x^h\psi(x).$$

E' facile vedere che $\varphi^j(0) = \delta_j^h\, h!$. Ponendo questa φ in (4), troviamo $c_h = 0$. Nell'espressione (3) di T, allora, tutti i coefficienti c_h con $h \geqslant m$ devono essere nulli e dunque sussiste la (2). $\square$